УДК 620.179.14

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КРИВОЙ НАМАГНИЧИВАНИЯ И ПЕТЕЛЬ МАГНИТНОГО ГИСТЕРЕЗИСА. Часть I. Анализ моделей

The mathematical models of the magnetization curve and the magnetic hysteresis loops. Part 1. Analysis of models

Матюк В.Ф., Осипов А.А.
Matyuk V.F., Osipov A.A.

Проанализированы наиболее используемые аналитические выражения для описания основной кривой намагничивания и петель магнитного гистерезиса, особое внимание уделено рассмотрению математических моделей с использованием арктангенсовых функций. Даны практические рекомендации по возможностям и ограничениям применения рассмотренных моделей.

The most used analytical formulas for the elementary magnetization curve and the magnetic hysteresis loops are analyzed, the mathematical models using arctangent functions is detailed discussed. Practical recommendations for possibilities and limitations of discussed models applications are given.

Введение.

Намагничивание и перемагничивание ферромагнетиков широко используется в различных отраслях науки и техники, в том числе в магнитных методах неразрушающего контроля. Эти процессы являются нелинейными и определяются тремя факторами: инверсией, вращением и парапроцессом [1]. Их строгое аналитическое описание представляет большие трудности. Поэтому технические расчеты магнитных цепей с ферромагнетиками проводятся с использованием большого количества математических моделей [2–23]. Однако выбор той или иной математической модели в каждом конкретном случае затруднен из-за отсутствия анализа границ применимости различных формул.

В данной работе проанализированы наиболее используемые аналитические выражения для описания основной кривой намагничивания и петель магнитного гистерезиса и подробно рассмотрена математическая модель с использованием арктангенсовых функций.

Основным требованием при построении модели является достаточная в каждом конкретном случае точность и простота описания основной кривой намагничивания и петель магнитного гистерезиса во всем диапазоне изменения перемагничивающего поля.

1. Моделирование кривой намагничивания

В области слабых магнитных полей ($H << H_{cs}$) основная кривая намагничивания хорошо описывается формулой Релея [1]

$$M = \chi_н H + b_R H^2, \tag{1}$$

где H напряженность намагничивающего поля, H_{cs} – коэрцитивная сила по предельному циклу, M – намагниченность ферромагнетика в магнитном поле напряженностью H, $\chi_н$ – начальная магнитная восприимчивость, b_R – коэффициент Релея.

В области подхода к насыщению используется формула Фрелиха [2]

$$M = \frac{M_s H}{a_s + H}, \tag{2}$$

где M_s – намагниченность насыщения, a_s – постоянная для описываемого материала.

Выражение (2) может быть представлено также в виде

$$\frac{H}{M} = \frac{a_s}{M_s} + \frac{H}{M_s}, \tag{3}$$

позволяющем весьма точно определить величину M_s в полях, при которых M еще значительно меньше M_s.

Для описания кривой намагничивания во всей области изменения магнитного поля используется большое количество различных функций.

В случае, если H и M (или магнитная индукция B) не меняют знака, то моделирующая функция может быть четной или нечетной. Если же H и B изменяют знак, то связывающая их функция может быть только нечетной. Коэффициенты в моделирующих функциях определяются по методу выбранных точек или по методу наименьших квадратов [3].

По методу выбранных точек результаты расчета привязываются к экспериментальным данным в заданных точках. Число этих точек на кривой намагничивания определяется количеством независимых коэффициентов, входящих в моделирующую функцию. Выбранные точки должны находится на аппроксимируемом участке кривой намагничивания, и отражать его характерные особенности.

По методу наименьших квадратов коэффициенты моделирующей функции определяются из условия минимума среднеквадратичного отклонения ее значений от экспериментальных данных. Этот метод обеспечивает лучшее совпадение моделирующей функции с реальной кривой намагничивания, но является более громоздким по сравнению с методом выбранных точек.

В [3] выделено одиннадцать групп функций, используемых разными авторами для описания кривой намагничивания. Рассмотрим возможности наиболее перспективных функций из каждой группы.

1.1. Кусочно-линейная аппроксимация

Для расчета магнитопроводов с малой нелинейностью магнитных свойств материала, из которого они изготавливаются, применяют кусочно-линейную аппроксимацию, при которой аппроксимируемую кривую заменяют ломаной линией с одной или несколькими точками излома (рис. 1, *а*, *б*) [5, 6]. Количество аппроксимирующих участков зависит от требуемой точности расчета и диапазона изменения намагничивающего поля. Например, если материал находится вблизи области насыщения, то для аппроксимации кривой намагничивания используют обычно две прямые (рис. 1, *а*). В этом случае полагают, что в области от 0 до H_i

$$B = \mu_i H, \tag{4}$$

а в области $H > H_i$

$$B = B_i + \mu_i'(H - H_i), \tag{5}$$

где H_i и B_i – соответственно напряженность и индукция в точке излома, $\mu_i = B_i/H_i$, $\mu_i' = (B_i - B_0)/H_i$, а $B = B_0$ при $H = 0$ для второй кривой.

Если ферромагнетик намагничивается от размагниченного состояния до состояния магнитного насыщения, то для построения модели требуется не менее трех прямых, при этом тангенс угла наклона первой прямой устанавливают равным величине начальной магнитной проницаемости (рис. 1, *б*).

Достоинством кусочно-линейной аппроксимации является то, что при ее использовании нелинейную задачу можно свести к линейной, а ее главным недостатком – скачкообразное изменение производной при переходе от одного участка модели к другому, что при использовании численных методов расчета может привести к недопустимым погрешностям.

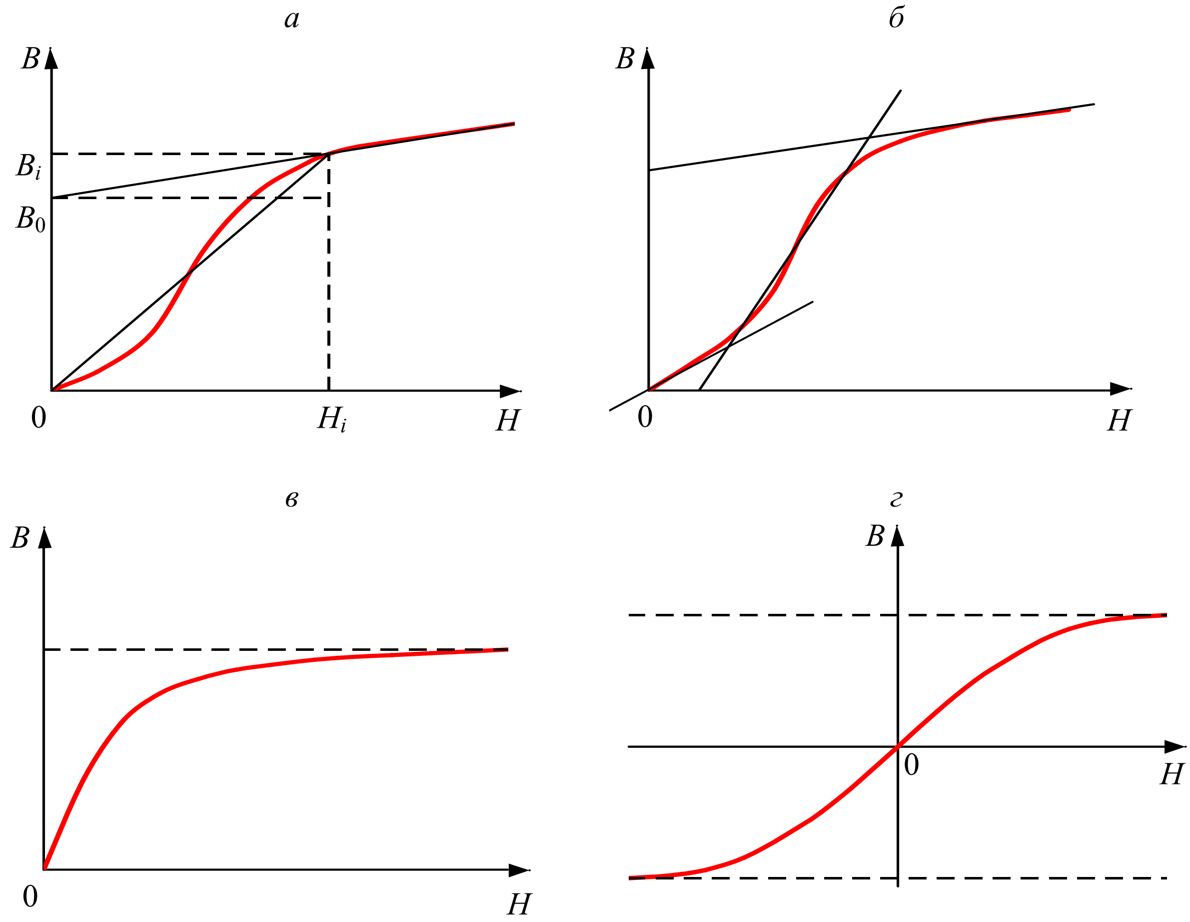


Рис. 1. Некоторые функции, используемые для аппроксимации кривой намагничивания

1.2. Гиперболическая аппроксимация

Для аппроксимации основной кривой намагничивания в области подхода к насыщению применяется формула Фрелиха в виде гиперболической функции (рис. 1, *в*)

$$B = \frac{H}{p_1 + p_2 H}, \tag{6}$$

где p_1 и p_2 – коэффициенты, определяемые методом выбранных точек.

Однако кривая намагничивания, определяемая этой функцией, несимметрична относительно начала координат и может быть использована только в случае, если H и B не меняют знака и лишь в области сильных полей. Причем из нее вытекает, что магнитная проницаемость не имеет экстремума, а это не соответствует действительности.

1.3. Аппроксимация с использованием арктангенса

Математическая модель кривой намагничивания с использованием арктангенса имеет вид

$$B = p_1 \mathrm{arctg}(p_2 H) + p_3 H. \tag{7}$$

Так как первое слагаемое в выражении (7) с ростом H асимптотически приближается к прямым, параллельным оси абсцисс и расположенным от нее на расстоянии $\pm p_1$, то изменение магнитной индукции в этой области характеризует второе слагаемое.

Данная аппроксимация является нечетной и может быть использована для расчета магнитных цепей как с постоянным, так и с переменным полем. При малых значениях H расчетная кривая идет обычно несколько выше, а при больших немного ниже реальной кривой намагничивания.

Коэффициенты p_1, p_2 и p_3 можно определить, выбрав три точки на кривой намагничивания. При этом для определения коэффициента p_2 следует решить уравнение

$$\frac{B_1 H_2 - B_2 H_1}{B_3 H_2 - B_2 H_3} = \frac{H_2 \mathrm{arctg}(p_2 H_1) - H_1 \mathrm{arctg}(p_2 H_2)}{H_2 \mathrm{arctg}(p_2 H_3) - H_3 \mathrm{arctg}(p_2 H_2)}, \tag{8}$$

а коэффициенты p_1 и p_3 можно определить по выражениям

$$p_1 = \frac{B_1 H_2 - B_2 H_1}{H_2 \mathrm{arctg}(p_2 H_1) - H_1 \mathrm{arctg}(p_2 H_2)}, \qquad p_3 = \frac{B_1 - p_1 \mathrm{arctg}(p_2 H_1)}{H_1}. \tag{9}$$

1.4. Экспоненциальная аппроксимация

Среди аппроксимаций экспоненциальной группы формул наибольшее распространение получило выражение [4, 5]

$$B = \mathrm{e}^{\frac{H}{p_1 + p_2 H}} - 1, \tag{10}$$

$$p_1 = \frac{H_1 H_2 \ln \frac{B_2 + 1}{B_1 + 1}}{(H_2 - H_1)\ln(B_1 + 1)\ln(B_2 + 1)}, \quad p_2 = \frac{H_2 \ln(B_1 + 1) - H_1 \ln(B_2 + 1)}{(H_2 - H_1)\ln(B_1 + 1)\ln(B_2 + 1)}, \tag{11}$$

где коэффициенты p_1 и p_2 определены по методу выбранных точек.

Для минимизации расхождений с экспериментальной кривой точки для привязки следует выбирать так, чтобы одна из них находилась в ненасыщенной области, а вторая после перегиба , но вблизи ее.

Данную аппроксимацию рекомендуется применять для расчета магнитных цепей с постоянным полем.

1.5. Логарифмическая аппроксимации

Аппроксимация основной кривой намагничивания с помощью логарифмической функции имеет вид [5]

$$B = p_1\sqrt{\ln(p_2 H + 1)}\,. \tag{12}$$

В выражение (12) для того, чтобы при $H = 0$ $B = 0$, под знак логарифма введена 1. Однако это резко понижает точность описания кривой намагничивания в области слабых полей.

Коэффициенты p_1 и p_2 для выражения (12) определяются методом выбранных точек и имеют вид

$$p_1 = \frac{B_1}{\sqrt{\ln\dfrac{H_1 e^{(B_1^2 - B_2^2)}}{H_1 - H_2} + 1}}, \qquad p_2 = \frac{e^{(B_1^2 - B_2^2)}}{H_1 - H_2}. \tag{13}$$

Логарифмическую аппроксимацию рекомендуется применять для расчета магнитных цепей с постоянным полем.

1.7. Аппроксимация степенным полиномом

Неплохие результаты получаются при аппроксимации основной кривой намагничивания нечетным степенным полиномом вида [5, 6]

$$H = p_1 B + p_2 B^3 + p_3 B^5 + \ldots \tag{14}$$

или

$$B = q_1 H + q_2 H^3 + q_3 H^5 + \ldots, \tag{15}$$

где p_1, p_2, p_3 …, q_1, q_2, q_3 … – коэффициенты, определяемые обычно методом выбранных точек.

Чем больше членов в правой части выражения (14) или (15), тем лучше совпадают расчетная и реальная кривые намагничивания.

Во многих случаях ограничиваются только двумя членами полинома

$$H = p_1 B + p_2 B^3 \tag{16}$$

или

$$B = q_1 H + q_2 H^3. \tag{17}$$

В этом случае расчетная кривая до загиба обычно идет несколько ниже, а за загибом немного выше реальной кривой намагничивания. При использовании трех членов степенного полинома наблюдается обратная картина – до загиба расчетная кривая идет несколько выше, а за загибом немного ниже реальной кривой намагничивания. При этом допустимая точность приближения достигается лишь на ограниченных участках кривой намагничивания.

При использовании двух членов степенного полинома коэффициенты для выражения (17) имеют вид

$$q_1 = \frac{B_1 H_2^3 - B_2 H_1^3}{H_1 H_2^3 - H_1^3 H_2}, \qquad q_2 = \frac{B_2 H_1 - B_1 H_2}{H_1 H_2^3 - H_1^3 H_2}. \tag{18}$$

Увеличение числа членов степенного полинома приводит к сложностям в определении коэффициентов аппроксимации.

Аппроксимация степенным полиномом является нечетной и может быть использована для расчета магнитных цепей как с постоянным, так и с переменным полем.

1.8. Аппроксимация гиперболическим синусом

Аппроксимации основной кривой намагничивания гиперболическим синусом [6]

$$H = p_1 \mathrm{sh}(p_2 B) \tag{19}$$

в принципе близка к аппроксимации полиномом по степеням B, так как разложив гиперболический синус в ряд, получаем полином по степеням B. Поэтому данная аппроксимация ведет себя подобно аппроксимации полиномом по степеням B.

Коэффициенты p_1 и p_2 для выражения (19), определенные методом выбранных точек, имеют вид

$$p_2 = \frac{\ln {H_2}/{H_1}}{B_2 - B_1}, \qquad p_1 = \frac{H_2}{\mathrm{sh} p_2 B_2}. \tag{20}$$

Аппроксимация гиперболическим синусом является нечетной и может быть использована для расчета магнитных цепей как с постоянным, так и с переменным полем.

1.9. Аппроксимация гиперболическим тангенсом

Аппроксимация гиперболическим тангенсом может иметь вид [3, 6]

$$H = p_1 \mathrm{th}(p_2 B) \tag{21}$$

или

$$B = q_1 \mathrm{sh}(q_2 H). \tag{22}$$

Она близка к аппроксимации полиномом по степеням B (или H), так как разложив гиперболический тангенс в ряд, получаем полином по степеням B (или H). Поэтому данная аппроксимация ведет себя подобно аппроксимации полиномом по степеням B (или H). В [3] отмечается, что гиперболический тангенс хуже описывает кривую намагничивания, чем гиперболический синус. Так как выражения (21) и (22) являются нечетными функциями, то они могут быть использованы для расчета магнитных цепей как с постоянным, так и с переменным полем.

1.10. Аппроксимация методом сплайнов

При наличии значительного количества экспериментальных точек и высоких требованиях к точности аппроксимации довольно эффективным оказался метод сплайнов [7, 8], заключающийся в использовании на выбранных участках кривой намагничивания разных аппроксимаций. Метод сплайнов позволяет подобрать аппроксимирующие функции таким образом, что в точках стыковки непрерывна не только сама результирующая сплайн-функция, но и ее производные. Ограничением метода сплайнов является громоздкость расчета его коэффициентов .

1.11. Аппроксимация с помощью рациональных функций

Хорошую согласованность с экспериментом дает аппроксимация основной кривой намагничивания с помощью рациональных функций [9]

$$M = \frac{p_n H^n + p_{n-1} H^{n-1} + \ldots + p_0}{q_n H^n + q_{n-1} H^{n-1} + \ldots + q_0}, \quad (23)$$

где p_i и q_i – коэффициенты, $i = 0 \ldots n$.

Старший коэффициент полинома в числителе дроби равен ординате экспериментальной точки на участке насыщения и определяет асимптотический характер поведения функции на этом участке. Младший коэффициент равен нулю в силу прохождения основной кривой намагничивания через начало координат. Остальные коэффициенты вычисляют по методу выбранных точек. Помимо необходимости большого числа $(2n+1)$ экспериментальных точек авторы отмечают сильную зависимость коэффициентов дроби от изменения их числа или координат (кроме первого коэффициента в числителе).

2. Моделирование петель магнитного гистерезиса

В области слабых магнитных полей ($H << H_{cs}$) для описания петли магнитного гистерезиса часто используется формула, предложенная Релеем [3]

$$M = (\chi_{н} + b_R H_m)H \pm \frac{b_R}{2}\left(H^2 - H_m^2\right), \quad (24)$$

где H_m – максимальное значение намагничивающего поля H, верхний знак относится к восходящей ветви петли, а нижний – к нисходящей.

Следует отметить, что расчет по (24) совпадает с реальной петлей магнитного гистерезиса лишь в крайних точках.

Верхнюю половину нисходящей ветви предельной петли ($H \geq - H_{cs}$) можно получить введением в (2) соответствующих постоянных [2]

$$M = \frac{M_r M_s (H + H_{cs})}{M_s H_{cs} + M_r H}, \quad (25)$$

где M_r – остаточная намагниченность.

Для описания верхней половины восходящей ветви предельной петли магнитного гистерезиса ($H \geq H_{cs}$) в выражении (25) следует перенести начало координат по оси абсцисс направо на отрезок $2H_{cs}$ [2]. Тогда

$$M = \frac{M_r M_s (H - H_{cs})}{H_{cs}(M_s - 2M_r) + M_r H}. \quad (26)$$

В [3] рассмотрен ряд выражений, описывающих петлю магнитного гистерезиса с помощью тригонометрических функций, гармонического ряда фигур Лиссажу, эллипса (метод Аркадьева), закона Гука, *S*-бразной кривой (метод Акулова), при помощи рядов, с использованием полярных координат и др. Однако они не нашли широкого практического применения.

Интересен подход к построению модели гистерезисного цикла на основе обобщенных правил Маделунга [10, 11], который позволяет воссоздать кривые возврата. Его недостатком является необходимость использования определенных отрезков экспериментальных кривых намагничивания для построения замкнутых циклов и предсказания траектории перемагничивания.

В [12] показано, что для тонкой электротехнической стали после определения модифицированных коэффициентов преобразования Кондорского можно по только одной основной кривой намагничивания вычислить все основные гистерезисные характеристики материала.

2.1. Аппроксимации на основе арктангенсовых функций

Наибольшее распространение для описания петель магнитного гистерезиса получили аналитические выражения с использованием арктангенсовых функций [13–18].

Данный способ описания базируется на введении так называемого гистерезисного поля [3]. В наиболее обобщенной форме эта аппроксимация представлена в [16]

$$M(H) = p_1 \mathrm{arctg}\{p_2[H + H_\text{г}(M, H)]\} + M_\text{к}(M, H), \tag{27}$$

где $H_\text{г}(M, H)$ – гистерезисное поле, которое в общем случае может быть функцией мгновенных значений напряженности H магнитного поля или намагниченности M материала и направления их изменения; $M_\text{к}(M, H)$ – корректирующая функция поля или намагниченности, необходимая для компенсации физически неприемлемых особенностей намагниченности M как функции перемагничивающего поля H, обусловленных первым слагаемым в правой части выражения (27). Параметры аппроксимации определяют методом выбранных точек.

В зависимости от выбранных точек привязки к экспериментальным данным из (27) получаются все известные аппроксимации с использованием арктангенсовых функций для описания основной кривой намагничивания и петель магнитного гистерезиса [3, 15–21]. Области применения этих аппроксимаций и решаемые ими задачи различны из-за особенностей их построения. Рассмотрим возможности наиболее распространенных из них.

2.1.1. Аппроксимация Зацепина

Положив в (27) $M_к = 0$ и учтя, что при $H \to +\infty$ $M = M_s$, при $H = 0$ $M = \pm M_{rs}$, а при $H = -H_c$ для нисходящей и при $H = +H_c$ для восходящей ветвей петли магнитного гистерезиса $M = 0$, получаем следующую систему уравнений для определения p_1, p_2 и $H_г$

$$\left.\begin{aligned} M_s &= p_1 \frac{\pi}{2} \\ \pm M_{rs} &= p_1 \operatorname{arctg}\left(p_2 H_г\right) \\ 0 &= p_1 \operatorname{arctg}\left[p_2\left(\mp H_{cs} + H_г\right)\right] \end{aligned}\right\}, \tag{28}$$

где знак «–» относится к нисходящей, а знак «+» – к восходящей ветвям петли магнитного гистерезиса.

Из (28) следует, что

$$p_1 = \frac{2}{\pi} M_s;\ H_г = \pm H_{cs};\quad p_2 = \frac{1}{H_{cs}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right), \tag{29}$$

где знак «+», определяемый направлением перемагничивающего поля, относится к нисходящей, а «–» – к восходящей ветвям петли магнитного гистерезиса.

С учетом (29) выражение (27) примет вид, предложенный в [15]

$$M = \frac{2}{\pi} M_s \operatorname{arctg}\left[\frac{H \pm H_{cs}}{H_{cs}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)\right], \tag{30}$$

где знак «+» соответствует нисходящей, а знак «–» – восходящей ветвям предельной петли магнитного гистерезиса.

Формула (30) является одной из самых простых и компактных среди аппроксимаций с использованием арктангенсовых функций и нашла широкое применение в работах, развивающих метод высших гармоник [22].

Одним из недостатков аппроксимации (30) является то, что она применима только для описания предельной петли магнитного гистерезиса [16]. Чтобы использовать выражение (30) для описания частного гистерезисного цикла, необходимо заменить величины намагниченности насыщения M_s, остаточной намагниченности M_{rs} и коэрцитивной силы H_{cs} по предельному циклу на соответствующие величины при амплитуде перемагничивающего поля H_m (M_m, M_r и H_c). Тогда

$$M = \frac{2}{\pi} M_m \operatorname{arctg}\left[\frac{H \pm H_c}{H_c} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_r}{M_m}\right)\right]. \tag{31}$$

Однако при описании частного гистерезисного цикла выражением (31) петля магнитного гистерезиса оказывается незамкнутой вследствие скачкообразного изменения гистерезисного поля $H_г$ от $-H_c$ до $+H_c$ при переходе от восходящей ветви петли к нисходящей и от $+H_c$ до $-H_c$ при переходе от нисходящей ветви к восходящей.

Кроме того, намагниченность M по частной петле магнитного гистерезиса не может быть равна ее максимальному значению M_m при $H = H_m$ ввиду того, что арктангенсовая функция принимает значение $\pm \pi/2$ только при $H = \pm\infty$.

2.1.2. Аппроксимация Пономарева

Для устранения вышеотмеченных недостатков аппроксимации (30) Ю.Ф. Пономаревым было предложено [16] выбрать $M_к$ равной

$$M_к = \mp \frac{p_1}{2}\left[\operatorname{arctg} p_2 (H_m + H_{cs}) - \operatorname{arctg} p_2 (H_m - H_{cs})\right], \tag{32}$$

а гистерезисное поле таким же, как и в предыдущей аппроксимации,

$$H_г = \pm H_{cs}, \tag{33}$$

где верхние знаки относятся к нисходящей, а нижние – к восходящей ветвям петли магнитного гистерезиса.

Выбор $M_к$ в соответствии с (32) обеспечивает замыкание ветвей петли магнитного гистерезиса. Параметр p_1 определен из условия, чтобы намагниченность насыщения M_s по предельной петле магнитного гистерезиса совпала с ее действительным значением. Тогда из (27) с учетом того, что $M_к \to 0$ при $H_m \to +\infty$

$$p_1 = \frac{2}{\pi} M_s. \tag{34}$$

Параметр p_2 выбран из условия совпадения максимальной дифференциальной магнитной восприимчивости $\chi_{dm}^{\text{пг}}$ по предельной петле с ее действительным значением. Так как $M_{\text{к}}$ не зависит от текущего значения H, то дифференциальная магнитная восприимчивость $\chi_{d}^{\text{пг}}$ имеет вид

$$\chi_{d}^{\text{пг}} = \frac{dM}{dH} = p_1 \frac{p_2}{1 + p_2^2 (H \pm H_{cs})^2}. \tag{35}$$

Условием максимума $\chi_{d}^{\text{пг}}$ является выражение

$$\frac{d^2 M}{dH^2} = \frac{-2 p_1 p_2^3 (H \pm H_{cs})}{\left[1 + p_2^2 \ (H \pm H_{cs})^2\right]^2} = 0. \tag{36}$$

Из (36) получаем, что $\chi_{d}^{\text{пг}} = \chi_{dm}^{\text{пг}}$ при $H = H_{cs}$. Тогда

$$\chi_{dm}^{\text{пг}} = p_1 p_2. \tag{37}$$

Из (37) с учетом (34)

$$p_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\chi_{dm}^{\text{пг}}}{M_s}. \tag{38}$$

Для удобства расчетов в [16] введена величина

$$H_s = \frac{M_s}{\chi_{dm}^{\text{пг}}}, \tag{39}$$

имеющая размерность напряженности магнитного поля.

В результате аппроксимация, предложенная Ю.Ф. Пономаревым, имеет вид

$$M = \frac{M_s}{\pi} \left\{ 2\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} \left(\frac{H \pm H_{cs}}{H_s} \right) \mp \left[\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} \left(\frac{H_m + H_{cs}}{H_s} \right) - \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} \left(\frac{H_m - H_{cs}}{H_s} \right) \right] \right\}, \tag{40}$$

где верхние знаки относятся к нисходящей, а нижние – к восходящей ветвям петли магнитного гистерезиса.

Для иллюстрации физического смысла величины H_s автор ввел понятие эквивалентной кусочно-линейной аппроксимации предельной петли магнитного гистерезиса, состоящей из четырех отрезков и имеющей те же значения $\chi_{dm}^{\text{пг}}$, H_{cs} и M_s, что и реальная петля предельного цикла. Тогда величина $2H_s$ определяет область магнитного поля, на протяжении которой по этой эквивалентной кусочно-линейной аппроксимации происходит изменение намагниченности от $-M_s$ до $+M_s$ и наоборот.

Из (40), положив $H_m \to +\infty$, получается выражение для предельной петли магнитного гистерезиса

$$M = \frac{2}{\pi} M_s \operatorname{arctg}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{H \pm H_{cs}}{H_s}\right)\right], \tag{41}$$

а с учетом (39)

$$M = \frac{2}{\pi} M_s \operatorname{arctg}\left[\frac{\pi}{2} \chi_{dm}^{\text{пг}}\left(\frac{H \pm H_{cs}}{M_s}\right)\right]. \tag{42}$$

По форме выражение (41) совпадает с выражением (30), если в последней ввести обозначение

$$H_s' = \frac{\pi H_{cs}}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{M_{rs}}{M_s}\right)}, \tag{43}$$

имеющее, как и (39), размерность напряженности магнитного поля.

2.1.3. Формула Акулова–Лучевского

Н.С. Акулов и Б.А. Лучевский, применив при статистическом учете распределения коэрцитивных сил и внутренних магнитных полей различных кристаллитов или групп доменов функцию распределения типа Коши [13] (по аналогии с работой [14] для сегнетоэлектриков), получили следующее аналитическое выражение для петли магнитного гистерезиса

$$M = \chi_r H \pm \frac{M_{sm}(H_m)}{\pi}\left[2\operatorname{arctg}\frac{H_{cs} \pm H}{q_0} - \left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs} + H_m}{q_0} + \operatorname{arctg}\frac{H_{cs} - H_m}{q_0}\right)\right], \tag{44}$$

где обратимая восприимчивость χ_r и величины M_{sm} и q_0 определяются экспериментально, верхние знаки относятся к нисходящей, а нижние – к восходящей ветвям петли.

При этом авторами [13] предлагается аппроксимировать χ_r следующим образом

$$\chi_r = \chi_н \text{ (для } H \le H_{cs}) \text{ и } \chi_r = \chi_н e^{-\frac{H-H_{cs}}{H_{cs}}} \text{ (для } H > H_{cs}), \tag{45}$$

где $\chi_н$ – начальная восприимчивость, определяемая как тангенс угла наклона касательной к основной кривой намагничивания в точке $H = 0$.

Величина M_{sm} определяется по выражению

$$M_{sm}(H_m) = \frac{2M_s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{H_m}{p_0}, \tag{46}$$

где коэффициент p_0 определяется из (44) и (46) для петли гистерезиса любого частного цикла

$$p_0 = \frac{H_{me}}{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi^2}{2}\frac{M_{re}}{M_s}\left(2\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}}{q_0} - \operatorname{arctg}\frac{H_{cs}+H_{me}}{q_0} - \operatorname{arctg}\frac{H_{cs}-H_{me}}{q_0}\right)^{-1}\right]}. \tag{47}$$

Величины H_{me} и M_{re} представляют собой соответственно предельное поле и остаточную намагниченность любого частного цикла.

$$p_0 = H_{cs}\sqrt{\frac{\chi_d^0 - \chi_{rm}}{\chi_d^m - \chi_d^0}}, \tag{48}$$

где χ_d^0 и χ_d^m – дифференциальная магнитная восприимчивость по петле гистерезиса при $H = 0$ и $H = -H_{cs}$ соответственно, χ_{rm} – обратимая магнитная восприимчивость по основной кривой намагничивания при $H = H_m$.

При $H_m \to +\infty$ $M_{sm} \to M_s$ и из (44) получается выражение для предельной петли магнитного гистерезиса

$$M = \frac{2}{\pi} M_s \operatorname{arctg} \frac{H_{cs} \pm H}{p_0}, \tag{49}$$

где верхние знаки относятся к нисходящей, а нижние – к восходящей ветвям петли.

Анализ выражения (44) показывает, что оно может быть получено из (27), если положить корректирующую функцию равной

$$M_{\text{к}} = \chi_r H \pm \frac{M_{sm}}{\pi}\left\{2\left(1-\frac{M_s}{M_{ms}}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{H_{cs}\pm H}{q_0}\right)-\left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}+H_m}{q_0}+\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}-H_m}{q_0}\right)\right\}. \quad (50)$$

Достоинством выражения (44) является то, что оно получено теоретически и в значительной мере отражает процессы перемагничивания ферромагнитных материалов. Основной его недостаток состоит в использовании нестандартных магнитных параметров, таких как остаточная намагниченность M_{re} по частному циклу при $H = H_{me}$, обратимая магнитная восприимчивость χ_{rm} и дифференциальные магнитные восприимчивости χ_d^0 и χ_d^m по основной кривой намагничивания. Поэтому выражение (44) не нашло широкого применения при решении практических задач.

2.1.4. Аппроксимация Мельгуя

В [17] М.А. Мельгуем, по аналогии с описанием гистерезисных процессов для сегнетоэлектриков, предложена аппроксимация, подобная (44). Основное отличие этой аппроксимации заключается в том, что корректирующая функция для нее имеет вид

$$M_{\text{к}} = \frac{\chi_{\text{н}} H_{cs}^2 H}{H^2+H_{cs}^2} \pm \frac{M_s}{\pi}\frac{H_m^2}{H_m^2+k_0 H_{cs}}\left\{2\operatorname{arctg}\left[\frac{H_{cs}\pm H}{H_{cs}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)\right]\left[1-\frac{H_m^2+k_0 H_{cs}^2}{H_m^2}\right]-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\left[\frac{H_{cs}+H_m}{H_{cs}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)\right]+\operatorname{arctg}\left[\frac{H_{cs}-H_m}{H_{cs}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)\right]\right\}, \quad (51)$$

где k_0 – коэффициент, определяемый из условия, что при $H = H_m = H_{cs}$ намагниченность по основной кривой намагничивания равна экспериментально измеренной величине M_c, верхние знаки относятся к нисходящей, а нижние – к восходящей ветвям петли.

Коэффициенты p_1 и p_2 и гистерезисное поле $H_{\text{г}}$ в этой аппроксимации вводятся с учетом того, что при $H_m \to \infty$ $M_{\text{к}} = 0$.

Так при $H = \pm H_{cs}$ и $H_m \to 0$ $M_{\text{к}} = 0$ и $M = 0$. Тогда по аналогии с (29) $H_{\text{г}} = \pm H_{cs}$, где знак «+» – для нисходящей, а «–» – для восходящей ветвей петли.

При $H = H_m \to +\infty$ $M_к = 0$ и $M = M_s$. Тогда для p_1 имеем выражение, аналогичное (29). При $H = 0$ и $H_m = +\infty$ $M_к = 0$ и $M = M_{rs}$. Тогда

$$M_{rs} = \frac{2M_s}{\pi} \operatorname{arctg}\left(p_2 H_{cs}\right). \tag{52}$$

Откуда

$$p_2 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)}{H_{cs}}. \tag{53}$$

Вместо (53) для удобства используется величина H_0, имеющая размерность напряженности магнитного поля и подобная по форме выражению (43) для аппроксимации Ю.Ф. Пономарева.

$$H_0 = \frac{H_{cs}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)}. \tag{54}$$

<u>Примечание</u> – Величины H_s, H'_s и H_0 имеют значения одного порядка с коэрцитивной силой предельной петли магнитного гистерезиса.

Таким образом, из (27) с учетом (51), (53) и (54) и знаков перемагничивающего поля вытекает аппроксимация М.А. Мельгуя

$$M = \chi_н \frac{H_{cs}^2 H}{H^2 + H_{cs}^2} \pm \frac{M_s}{\pi} \frac{H_m^2}{H_m^2 + k_0 H_{cs}^2} \times$$

$$\times \left[2\operatorname{arctg}\frac{H_{cs} \pm H}{H_0} - \left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs} + H_m}{H_0} + \operatorname{arctg}\frac{H_{cs} - H_m}{H_0} \right) \right], \tag{55}$$

где верхние знаки относятся к нисходящей, а нижние – к восходящей ветвям петли, а k_0 определяется из условия, что при $H = H_m = H_{cs}$ $M = M_c$

$$k_0 = \frac{M_s}{\pi} \frac{\operatorname{arctg}\left(2\frac{H_{cs}}{H_0}\right)}{M_c - \chi_н \frac{H_{cs}}{2}} - 1. \tag{56}$$

Сравнение этой аппроксимации с экспериментальными данными, проведенное в [18], показало ее применимость для решения ряда задач неразрушающего контроля.

При $H_m \to \infty$

$$M = \frac{2}{\pi} M_s \operatorname{arctg} \frac{H_{cs} \pm H}{H_0} = \frac{2}{\pi} M_s \operatorname{arctg} \left[\frac{H_{cs} \pm H}{H_{cs}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{M_{rs}}{M_s} \right) \right], \tag{57}$$

что с учетом принятых обозначений совпадает с (30), (41) и (49).

Большее число точек привязки с экспериментальными данными (четыре вместо трех) по сравнению с аппроксимацией Пономарева предполагает более точное описание гистерезисных явлений, а более простое определение входящих в выражение (55) параметров по сравнению с формулой Акулова–Лучевского делает аппроксимацию Мельгуя удобнее для практического использования.

3. Анализ математических моделей основной кривой намагничивания на основе арктангенсов

Одним из показателей работоспособности той или иной модели является возможность ее использования для описания основной кривой намагничивания и определяемой из нее магнитной восприимчивости, в том числе начальной и дифференциальной. Поскольку кривая намагничивания представляет собой совокупность вершин частных петель магнитного гистерезиса, то для ее получения в выражениях (30), (40), (44) и (55) следует положить максимальные значения намагниченности M_m и напряженности H_m намагничивающего поля равными текущим координатам M и H точек петли, то есть $H_m = H$ и $M_m = M$.

Для (30) указанного выше способа получения выражения для основной кривой намагничивания недостаточно, поскольку для того, чтобы основная кривая по этой модели проходила через ноль, необходимо из описывающей ее формулы убрать коэрцитивную силу, которая суммируется с соответствующим знаком с перемагничивающим полем. В результате получается выражение, описывающее безгистерезисную кривую намагничивания.

$$M = \frac{2}{\pi} M_s \operatorname{arctg} \left[\frac{H}{H_{cs}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{M_{rs}}{M_s} \right) \right]. \tag{58}$$

Магнитная восприимчивость по (58) будет иметь вид

$$\chi^{\text{ок}} = \frac{M}{H} = \frac{2}{\pi}\frac{M_s}{H}\operatorname{arctg}\left[\frac{H}{H_{cs}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)\right], \tag{59}$$

дифференциальная магнитная восприимчивость

$$\chi_d^{\text{ок}} = \frac{2}{\pi}\frac{M_s}{H_{cs}}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)}{1+\frac{H^2}{H_{cs}^2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right)}, \tag{60}$$

а максимум дифференциальной магнитной восприимчивости

$$\chi_{dm}^{\text{ок}} = \frac{2}{\pi}\frac{M_s}{H_{cs}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{M_{rs}}{M_s}\right). \tag{61}$$

Анализ выражений (59–60) показал, что в области слабых намагничивающих полей H магнитная восприимчивость $\chi^{\text{ок}}$ и дифференциальная магнитная восприимчивость $\chi_d^{\text{ок}}$ на основной кривой намагничивания по аппроксимации (30) квадратично зависят от H, что не соответствует закону Релея. Из (59) и (60) следует, что при $H \to 0$ $\chi^{\text{ок}} = \chi_d^{\text{ок}} = \text{const}$, что удовлетворяет закону Релея. Однако максимум величин $\chi^{\text{ок}}$ и $\chi_d^{\text{ок}}$ наблюдается также при $H = 0$ (с ростом H эти величины только уменьшаются), что противоречит действительности. Тем не менее, следует отметить, что данная аппроксимация хорошо описывает изменение магнитной восприимчивости в области сильных магнитных полей, хотя для дифференциальной магнитной восприимчивости результаты расчета даже в этой области заметно отличаются от экспериментальных данных.

Из (40) при условии $H_m = H$ получается следующее выражение для описания основной кривой намагничивания по Пономареву

$$M = \frac{M_s}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{H+H_{cs}}{H_s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{H-H_{cs}}{H_s}\right)\right]; \tag{62}$$

$$\chi^{\text{ок}}=\frac{1}{\pi}\frac{M_s}{H}\left[\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\left(\frac{H+H_{cs}}{H_s}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{H-H_{cs}}{H_s}\right)\right]. \tag{63}$$

$$\chi_d^{\text{ок}}=\frac{M_s}{2H_s}\left[\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{H+H_{cs}}{H_s}\right)^2}+\frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{H-H_{cs}}{H_s}\right)^2}\right]. \tag{64}$$

$$\chi_{dm}^{\text{ок}}=\frac{M_s}{2H_s}\left\{\frac{1}{1+\frac{\pi^2H_{cs}^2}{4H_s^2}\left[\sqrt{2\sqrt{\frac{4H_s^2}{\pi^2H_{cs}^2}+1}-\left(\frac{4H_s^2}{\pi^2H_{cs}^2}+1\right)}+1\right]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\frac{\pi^2H_{cs}^2}{4H_s^2}\left[\sqrt{2\sqrt{\frac{4H_s^2}{\pi^2H_{cs}^2}+1}-\left(\frac{4H_s^2}{\pi^2H_{cs}^2}+1\right)}-1\right]^2}\right\}. \tag{65}$$

Зависимости $\chi^{\text{ок}}$ и $\chi_d^{\text{ок}}$ от H по (63–65) в области слабых полей хотя и являются квадратичными, но при $H\to 0$ их изменение согласуется с экспериментальными данными.

Основная кривая намагничивания и выражения для магнитных восприимчивостей по аппроксимации Акулова–Лучевского имеет вид

$$M\ =\chi_r H+\frac{M_{sm}(H)}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}+H}{b_0}-\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}-H}{b_0}\right). \tag{66}$$

$$\chi^{\text{ок}}=\chi_r+\frac{M_{sm}(H)}{\pi H_m}\left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}+H}{b_0}-\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}-H}{b_0}\right). \tag{67}$$

$$\chi_d^{\text{ок}} = \chi_r + \frac{M_{sm}(H)}{\pi b_0}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{H_{cs}+H}{b_0}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{H_{cs}-H}{b_0}\right)^2}\right] +$$

$$+\frac{2M_s}{\pi^2 a_0}\frac{1}{1+\frac{H^2}{a_0^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}+H}{b_0} - \operatorname{arctg}\frac{H_{cs}-H}{b_0}\right). \qquad (68)$$

Следует отметить, что выражение (66) в области слабых полей согласуется с законом Релея гораздо лучше других моделей.

Из аппроксимации Мельгуя вытекают следующие выражения для основной кривой намагничивания и величин магнитных восприимчивостей

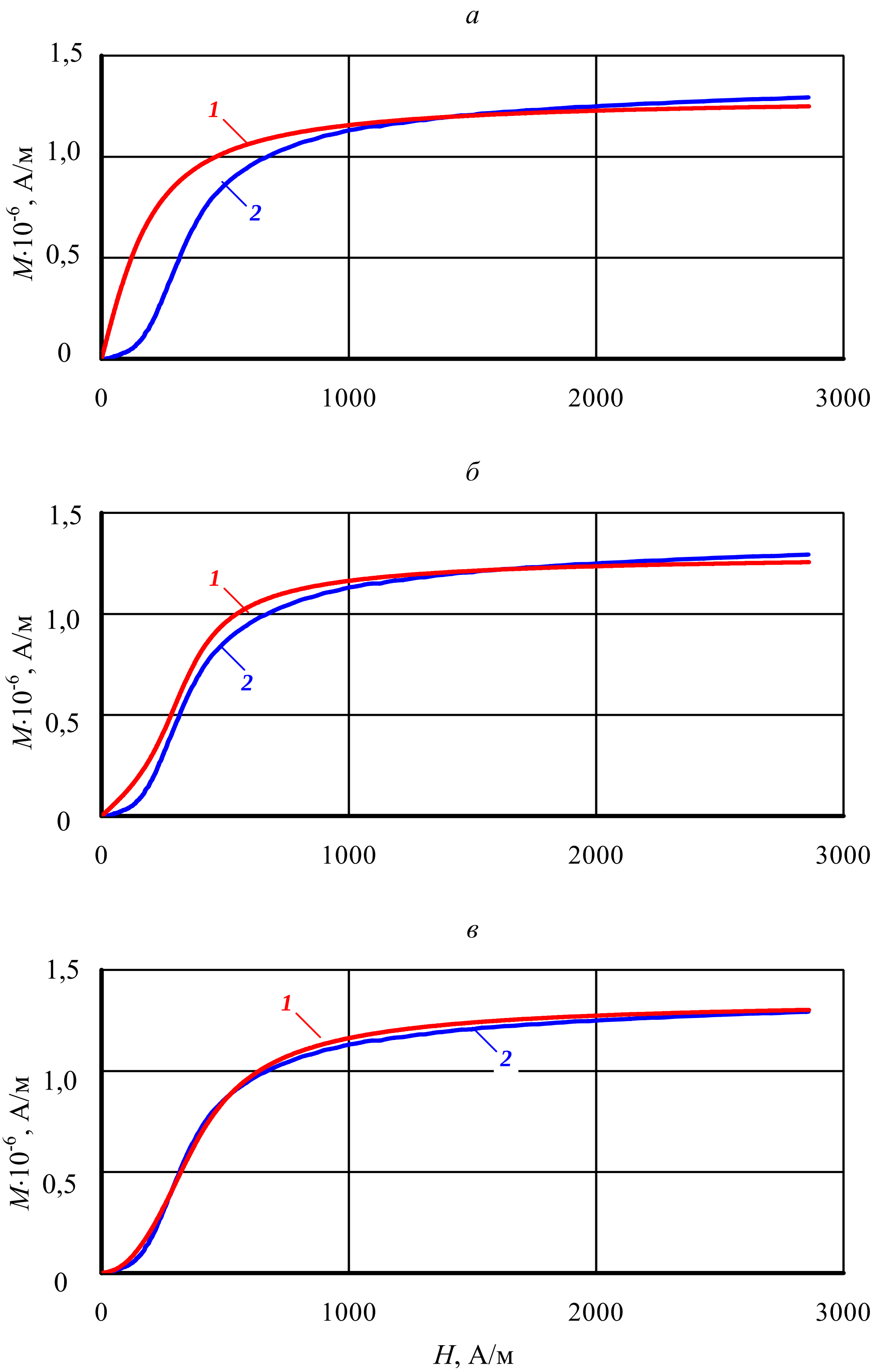
$$M = \chi_{\text{н}}\frac{H_{cs}^2 H}{H^2 + H_{cs}^2} + \frac{M_s}{\pi}\frac{H^2}{H^2 + k_0 H_{cs}^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}+H}{H_0} - \operatorname{arctg}\frac{H_{cs}-H}{H_0}\right), \qquad (69)$$

$$\chi^{\text{ок}} = \frac{M}{H} = \chi_{\text{н}}\frac{H_{cs}^2}{H^2 + H_{cs}^2} + \frac{M_s}{\pi}\frac{H}{H^2 + k_0 H_{cs}^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}+H}{H_0} - \operatorname{arctg}\frac{H_{cs}-H}{H_0}\right), \qquad (70)$$

$$\chi_d^{\text{ок}} = \chi_{\text{н}}\frac{H_{cs}^2 - H^2}{\left(H^2 + H_{cs}^2\right)^2}H_{cs}^2 + \frac{M_s}{\pi}\frac{H}{H^2 + k_0 H_{cs}^2}\left[\frac{H_0 H}{H_0^2 + (H_{cs}+H)^2} + \frac{H_0 H}{H_0^2 + (H_{cs}-H)^2} +\right.$$

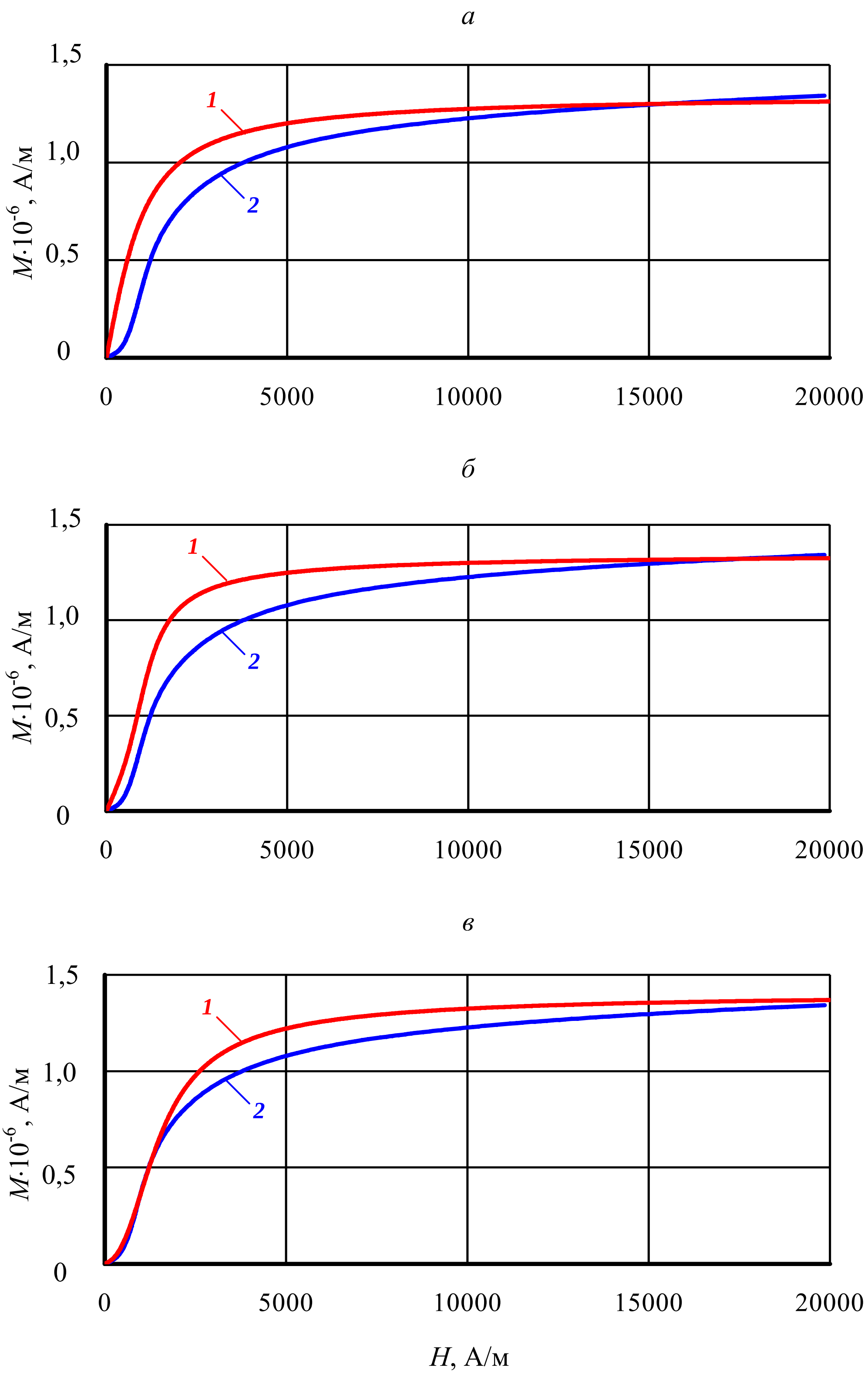
$$\left.+\frac{2k_0 H_{cs}^2}{H^2 + k_0 H_{cs}^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{H_{cs}+H}{H_0} - \operatorname{arctg}\frac{H_{cs}-H}{H_0}\right)\right]. \qquad (71)$$

На рисунках 2–5 представлены основные кривые намагничивания для материалов с разными магнитными свойствами, рассчитанные по (58), (62) и (69) и построенные на основе экспериментальных данных, полученных с помощью установки УИМХ [24] на кольцевых образцах из сталей 08кп и 60С2. Для получения разных магнитных свойств образцы подвергались соответствующим режимам термообработки, что обеспечило изменение их коэрцитивной силы от 297 до 3120 А/м и соответствующего изменения других свойств. Этот диапазон изменения магнитных свойств образцов соответствует как магнитомягким, так и магнитотвердым материалам.



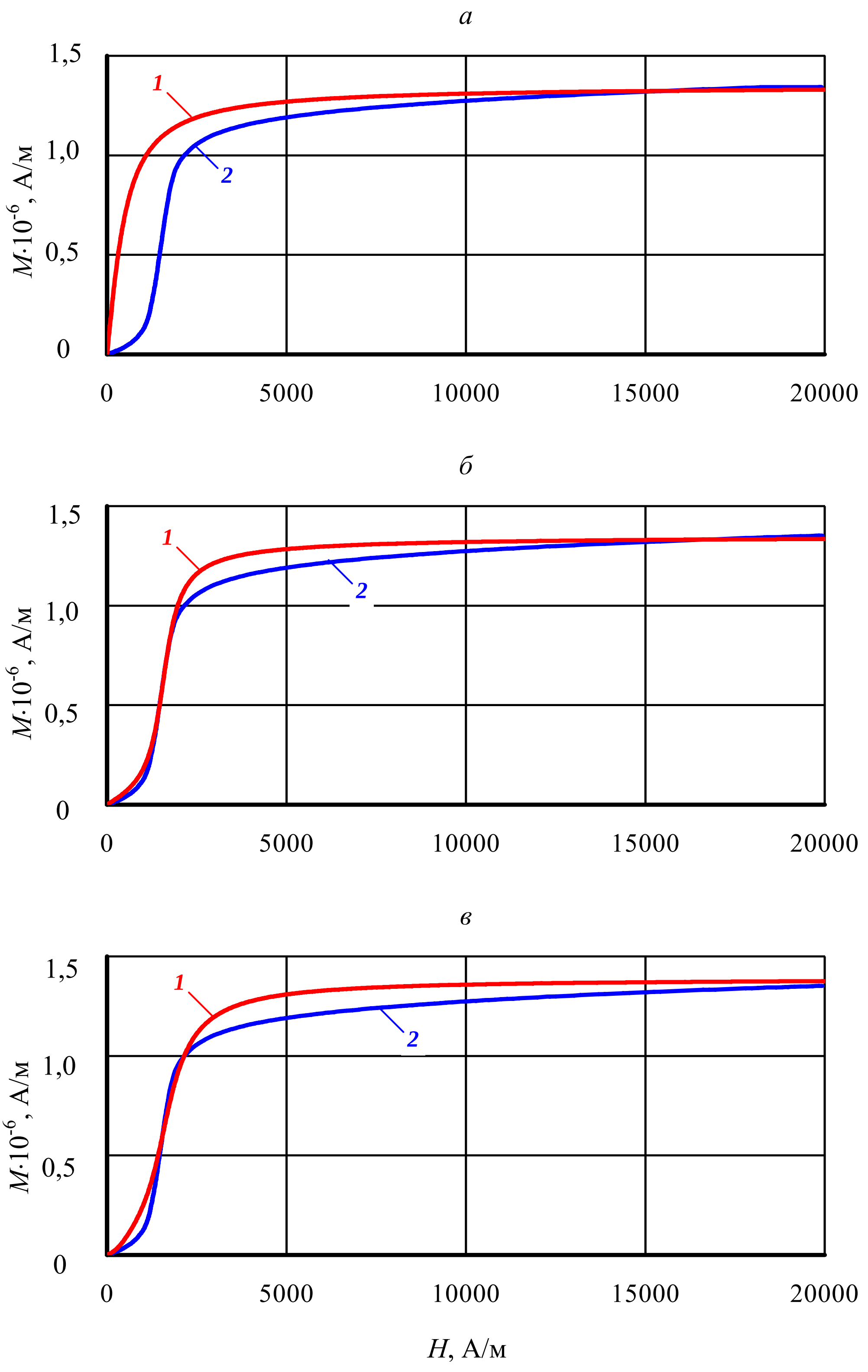
H_{cs} = 297 А/м; M_r = 0,86·10^6 А/м; M_s = 1,22·10^6 А/м; M_c = 0,44·10^6 А/м; $\chi_н$ = 125

Рис. 2. Основная кривая намагничивания, рассчитанная (**1**) по (58) – *а*, по (62) – *б* и по (69) – *в*, в сравнении с экспериментальной кривой (**2**)



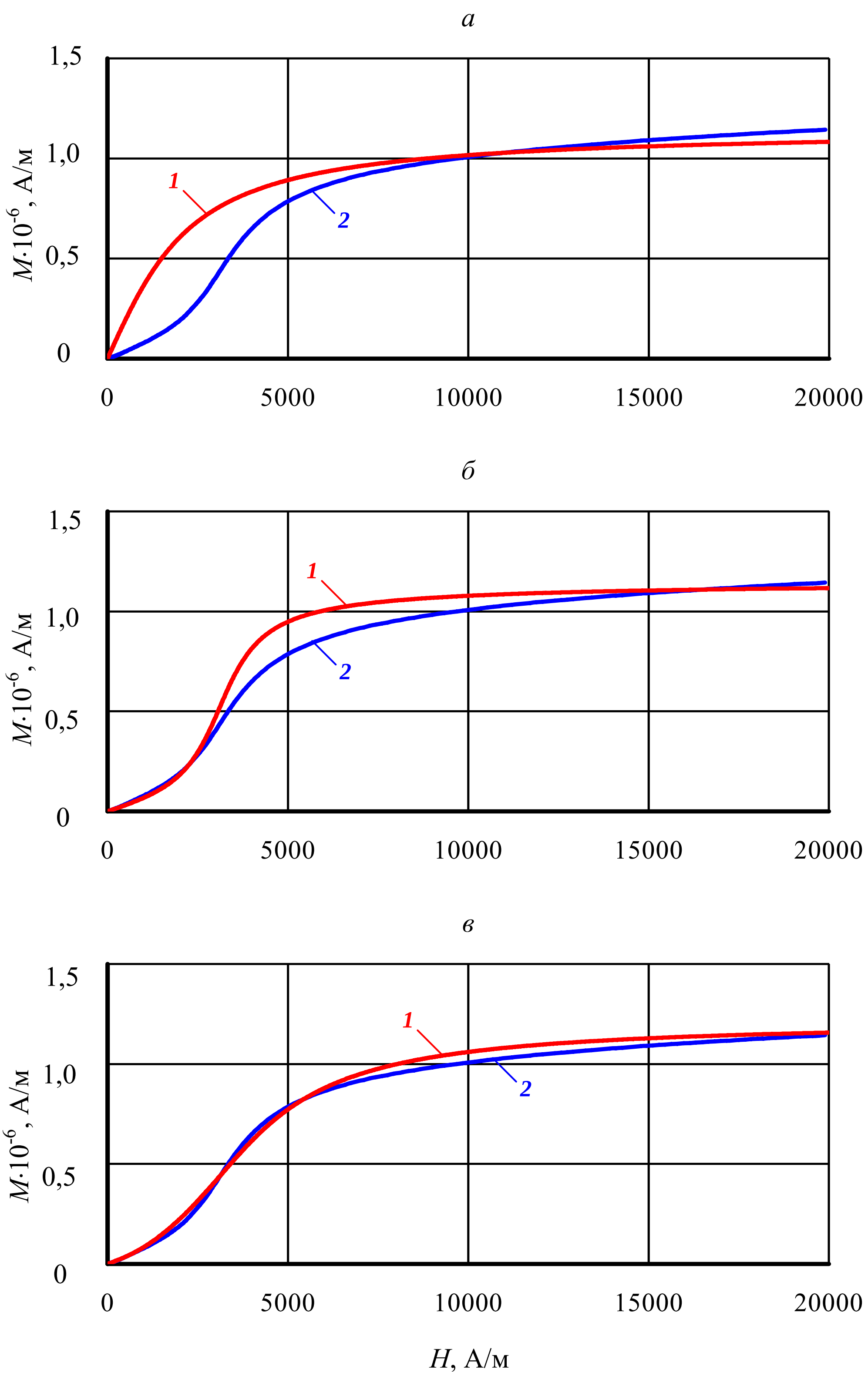
H_{cs} = 907 А/м; M_r = 0,69·10^6 А/м; M_s = 1,35·10^6 А/м; M_c = 0,31·10^6 А/м; $\chi_{н}$ = 66

Рис. 3. Основная кривая намагничивания, рассчитанная (**1**) по (58) – *а*, по (62) – *б* и по (69) – *в*, в сравнении с экспериментальной кривой (**2**)



H_{cs} = 1570 А/м; M_r = 1,1·10^6 А/м; M_s = 1,35·10^6 А/м; M_c = 0,62·10^6 А/м; $\chi_н$ = 56

Рис. 4. Основная кривая намагничивания, рассчитанная (**1**) по (58) – *а*, по (62) – *б* и по (69) – *в*, в сравнении с экспериментальной кривой (**2**)



H_{cs} = 3120 А/м; M_r = 0,76·10^6 А/м; M_s = 1,15·10^6 А/м; M_c = 0,44·10^6 А/м; $\chi_н$ = 49

Рис. 5. Основная кривая намагничивания, рассчитанная (**1**) по (58) – *а*, по (62) – *б* и по (69) – *в*, в сравнении с экспериментальной кривой (**2**)

Несмотря на то, что коэрцитивные силы материала исследуемых образцов значительно отличаются (крайние значения более чем на порядок), в ряде случаев (рисунки 2, *в* и 4, *в*) имеет место почти полное совпадение расчетных и экспериментальных кривых.

Из рисунков 2–5 видно, что большую согласованность с экспериментом имеют аппроксимации (62) и (69), причем для материала с H_{cs} = 1570 А/м формула (62) несколько лучше описывает основную кривую намагничивания, чем (69) (рисунок 4). В остальных случаях согласованность экспериментальных данных и расчетов по (69) существенно выше.

При относительно больших значениях коэрцитивной силы (H_{cs} = 1570 А/м и 3120 А/м) формула (62) дает хорошие результаты для основной кривой при намагничивающих полях меньше или порядка коэрцитивной силы (рисунки 4, *б* и 5, *б*). Однако для образцов с H_{cs} = 297 А/м и 907 А/м наблюдается существенное отличие аппроксимации по (62) от экспериментальных данных. В то же время в данном диапазоне полей формула (69) вполне удовлетворительно описывает основную кривую намагничивания во всех приведенных случаях (рисунки 2–5).

Заметно хуже рассматриваемые модели описывают основную кривую намагничивания при полях, больших коэрцитивной силы намагничиваемого материала (например, для H_{cs} = 907 А/м и 1570 А/м), причем отличие результатов расчета от экспериментальных данных имеет одинаковую для всех рассматриваемых моделей закономерность. Это показывает, что аппроксимации (58), (62) и (69) недостаточно точно описывают процесс приближения ферромагнетика к магнитному насыщению (рисунки 3 и 4).

Приведенное сравнение известных арктангенсовых аппроксимаций с экспериментальными данными показало, что формула (69) лучше других аппроксимаций описывает основную кривую намагничивания ферромагнитных материалов в широкой области изменения их магнитных свойств. К сожалению, в ряде случаев (рисунки 3, *в* и 4, *в*) результаты расчета по формуле (69) нельзя признать приемлемыми во всем диапазоне изменения намагничивающего поля (от 0 до H_m). Поэтому объективно назрела потребность в дальнейшем развитии этой аппроксимации.

4. Анализ математических моделей петель магнитного гистерезиса на основе арктангенсов

Выражения (30), (40), (44) и (55) используют разные параметры для описания петель магнитного гистерезиса, чем существенно и отличаются между собой.

При $H_m \to \infty$ петля магнитного гистерезиса является предельной. Поскольку в (30) величина H_m не входит, то ее вид при $H_m \to \infty$ не изменяется. При переходе к предельной петле этот же вид принимают и другие аппроксимации (41), (49) и (57), хотя они и отличаются используемыми параметрами. Ввиду того, что в (30) и в (57) входят одни и те же параметры, эти аппроксимации для предельной петли гистерезиса тождественно равны.

Поскольку выражения (30) и (57) для предельной петли магнитного гистерезиса совпадают, то сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными проведем только для моделей (41) и (57). Это сравнение (рисунки 6–9) показывает, что в ряде случаев расчет предельной петли магнитного гистерезиса по (41) подтверждается с точностью в несколько процентов. Однако в других случаях погрешность расчета превышает 20%. Отметим также, что расчет предельной петли гистерезиса по (41) всегда приводит к завышенным значениям остаточной намагниченности M_{rs}. Данное обстоятельство следует учитывать при практическом применении выражения (41).

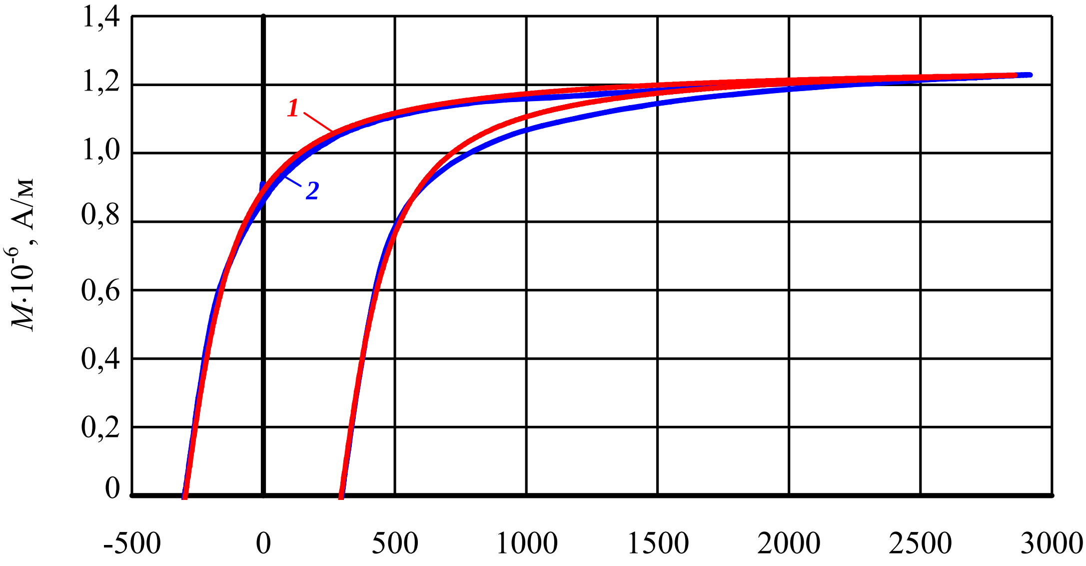
В задачах, где определяющим параметром является дифференциальная магнитная проницаемость, использование выражений (41) и (57) необходимо дополнительно обосновать. В неразрушающем контроле такие задачи возникают при анализе высших гармонических составляющих сигнала. Для них можно рекомендовать выражение (41), так как оно изначально разрабатывалось для решения подобных задач.

В то же время во всем интервале изменения намагниченности по предельной петле магнитного гистерезиса для ее описания лучше подходят выражения (30) и (57), которые используют основные магнитные параметры предельной петли и поэтому по величине намагниченности лучше согласованы с экспериментом. Необходимо также отметить, что для всех четырех моделей максимум дифференциальной восприимчивости по предельной петле гистерезиса находится при поле, равном коэрцитивной силе.

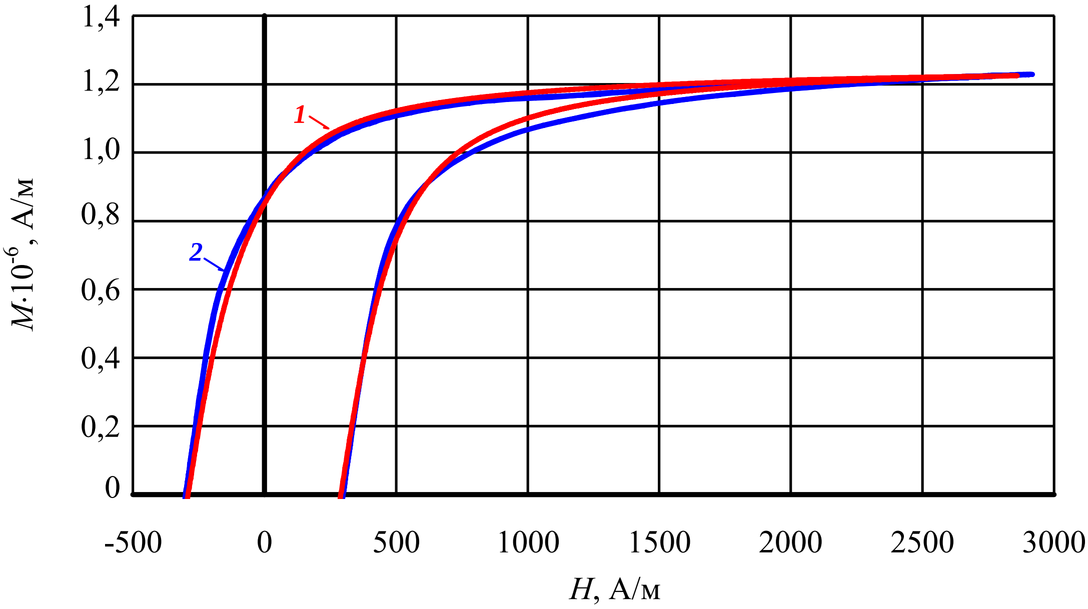
Для полей в области коэрцитивной силы материала наиболее точно петля магнитного гистерезиса описывается выражением (41), поскольку именно в данной области находятся два параметра, которые используются этой моделью. За пределами этой области полей расчет по (41) может приводить как к завышенным, так и к заниженным результатам.

Общим ограничением для выражений (30), (41) и (57) является недостаточно точное описание ветвей петли магнитного гистерезиса при подходе к насыщению. Уже при полях порядка нескольких коэрцитивных сил эти модели дают существенно отличающиеся от экспериментальных результаты независимо от магнитных характеристик материала. Максимум погрешности приходится обычно на интервал полей, меньших коэрцитивной силы и больших трех коэрцитивных сил.

а

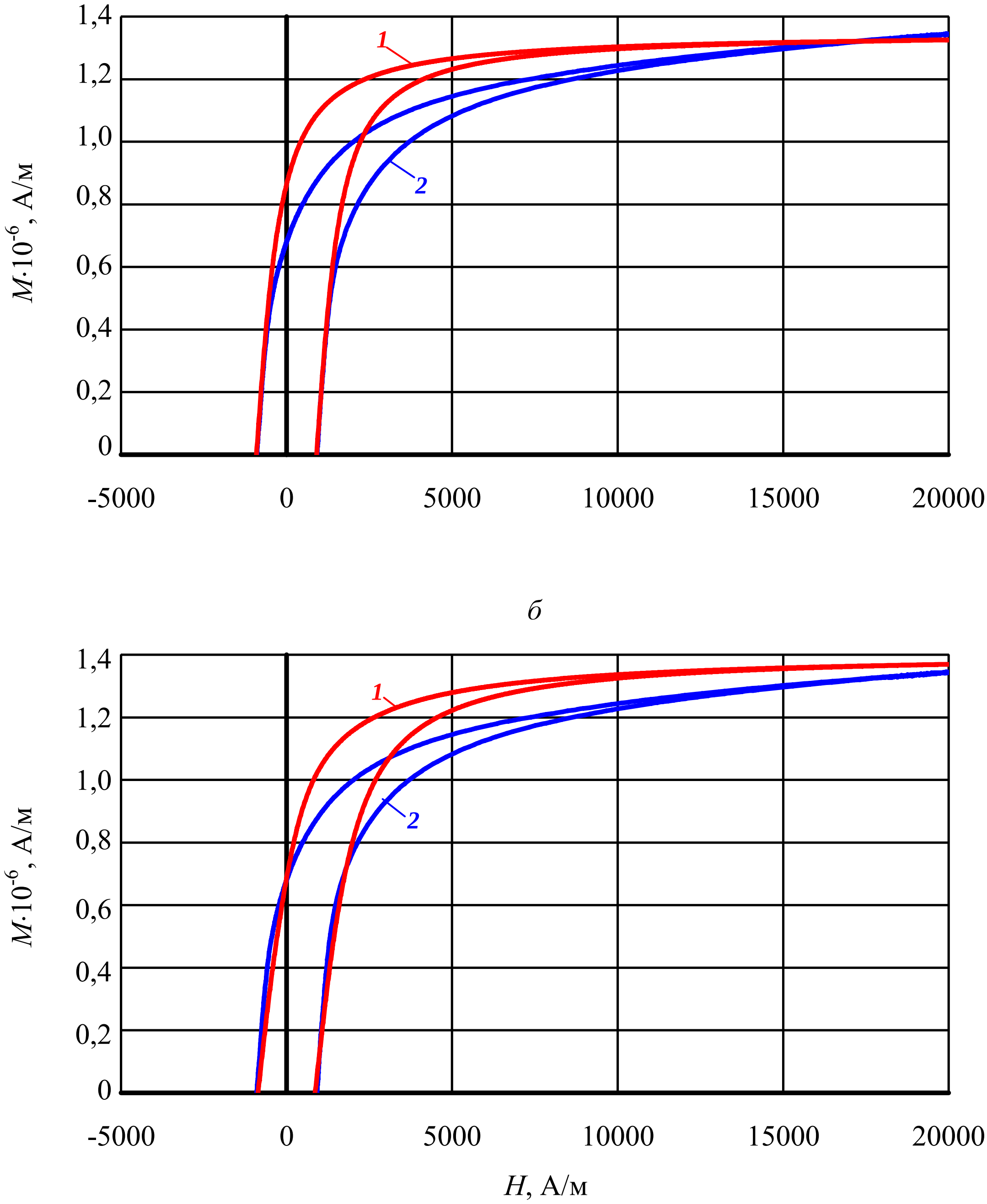


б



H_{cs} = 297 А/м; M_r = 0,86·10^6 А/м; M_s = 1,22·10^6 А/м; M_c = 0,44·10^6 А/м; $\chi_н$ = 125

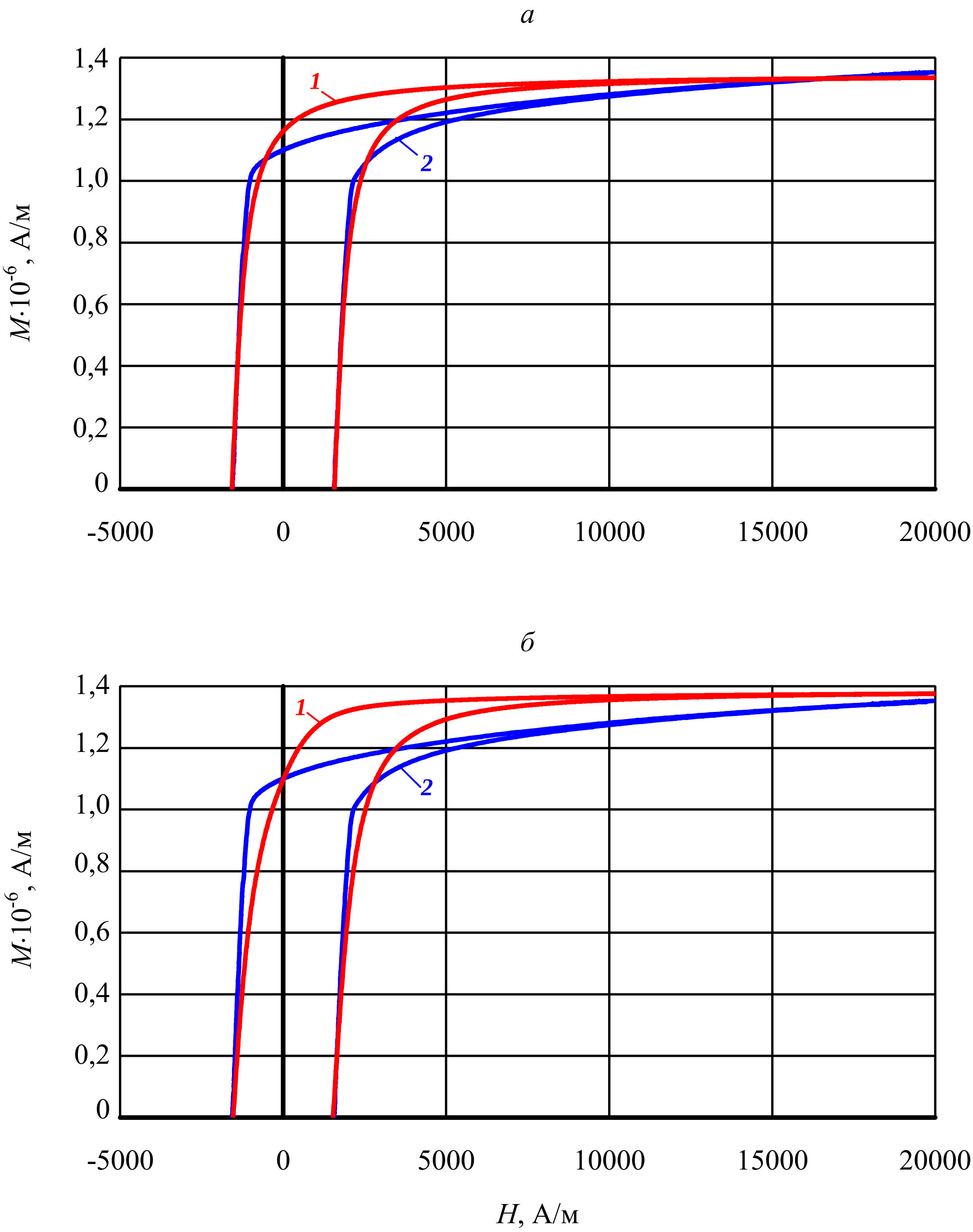
Рис. 6. Предельная петля магнитного гистерезиса, рассчитанная (**1**) по (41) – *а*, и по (57) – *б*, в сравнении с экспериментальной кривой (**2**) *а*



б

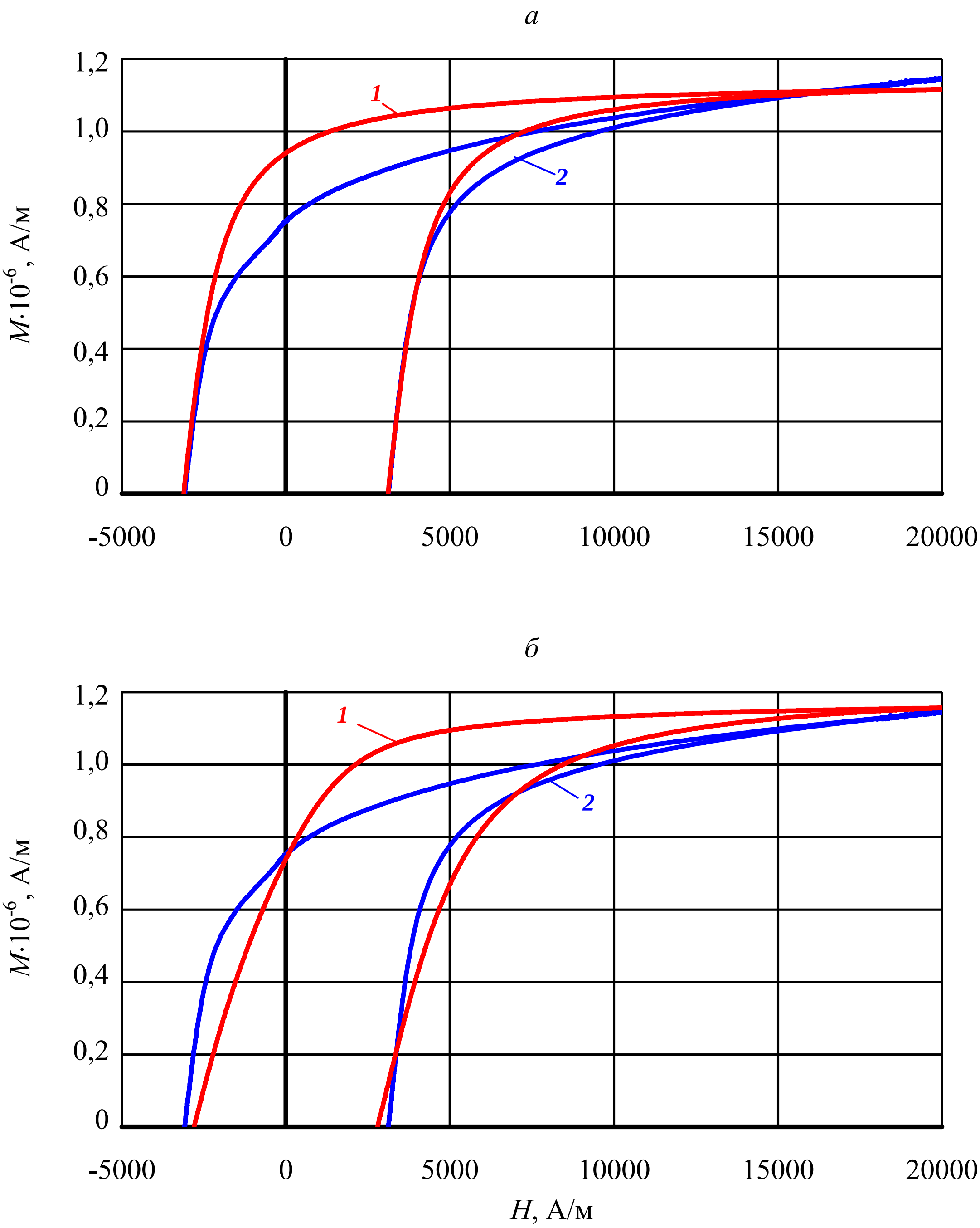
H_{cs} = 907 А/м; M_r = 0,69·10^6 А/м; M_s = 1,35·10^6 А/м; M_c = 0,31·10^6 А/м; $\chi_н$ = 66

Рис. 7. Предельная петля магнитного гистерезиса, рассчитанная (**1**) по (41) – *а*, и по (57) – *б*, в сравнении с экспериментальной кривой (**2**)



H_{cs} = 1570 А/м; $M_r = 1{,}1{\cdot}10^6$ А/м; $M_s = 1{,}35{\cdot}10^6$ А/м; $M_c = 0{,}62{\cdot}10^6$ А/м; $\chi_н = 56$

Рис. 8. Предельная петля магнитного гистерезиса, рассчитанная (***1***) по (41) – *а*, и по (57) – *б*, в сравнении с экспериментальной кривой (***2***)



H_{cs} = 3120 А/м; M_r = 0,76·10^6 А/м; M_s = 1,15·10^6 А/м; M_c = 0,44·10^6 А/м; $\chi_н$ = 49

Рис. 9. Предельная петля магнитного гистерезиса, рассчитанная (***1***) по (41) – *а*, и по (57) – *б*, в сравнении с экспериментальной кривой (***2***)

Известные в настоящее время аппроксимации петли магнитного гистерезиса на основе арктангенсов можно условно разделить на те, которые требуют экспериментально снятых значений магнитных параметров для каждой частной петли гистерезиса, и те, которые обеспечивают аппроксимацию каждой частной петли по результатам измерения магнитных параметров ферромагнетика на предельной петле гистерезиса. Из рассмотренных нами моделей на основе арктангенса к первому варианту формул для описания частных петель магнитного гистерезиса относится выражение (30), а ко второму – выражения (40), (44) и (55).

Заключение

1. Проведенный анализ показал, что в что большинство известных математических моделей основной кривой намагничивания, предельной и частных петель магнитного гистерезиса адекватно описывают процессы намагничивания и перемагничивания ферромагнитного материала только в узком диапазоне изменения намагничивающего поля.

2. Математические модели на основе арктангенсов в целом удовлетворительно описывают процесс намагничивания и перемагничивания ферромагнетика. Однако при решении конкретных задач для материалов с различными магнитными свойствами выбор той или иной модели существенно неоднозначен. В первую очередь эти модели не соответствуют закону Релея. Значительные отклонения от экспериментальных данных наблюдаются также при полях от одной до нескольких коэрцитивных сил и при приближении ферромагнетика к магнитному насыщению. Поэтому весьма актуальной остается задача по совершенствованию математических моделей на основе арктангенсовых функций, чтобы их можно было применять для более широкого класса задач и материалов во всем диапазоне возможных изменений величин намагничивающего поля..

Литература

1. Вонсовский С.В., Шур Я.С. Ферромагнетизм. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 816 с.
2. Янус Р.И. Магнитная дефектоскопия. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 171с.
3. Бессонов Л.А. Электрические цепи со сталью. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1948. – 344 с.
4. Городецкий П.Г. Обзор аналитических выражений кривых намагничивания и гистерезисных петель. – Киев: Воениздат, 1956. – 59 с.
5. Зарипов М.Ф., Фикс-Марголига И.Г., Вахитова Х.З. Анализ различных методов аппроксимации кривой намагничивания. – ДАН УЗ СССР, 1974, № 3, с. 8–10.
6. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. – М.: Энергия, 1976. – 496 с.
7. Кадочников А.И., Хан Е.Б. Аппроксимация основной кривой намагничивания па-

раболической сплайн-функцией. – Изв. вузов, Электромеханика, 1991, № 7, с. 11–15.
8. Кадочников А.И., Хан Е.Б., Лобанова Н.Б. Нестандартный сплайн для аппроксимации кривых намагничивания и перемагничивания. – Дефектоскопия, 1992, № 11, с. 75–81.
9. Михайлов С.П., Литвинцев А.А. Аппроксимация экспериментальных кривых намагничивания с помощью рациональных функций. – Дефектоскопия, 1995, № 6, с. 52–55.
10. Зирка С.Е., Мороз Ю.И. Моделирование магнитного гистерезиса на основе обобщенных правил Маделунга. Часть 2. Описание алгоритмов. – Технічна електродинаміка, 1999, № 2, с. 7–13.
11. Зирка С.Е., Мороз Ю.И. Алгоритмы моделирования гистерезиса в задачах магнетодинамики. – Технічна електродинаміка, 2002, № 5, с. 7–13.
12. Кадочников А.И., Федорищева Э.Э., Чернова Г.С. Исследование связи между основной кривой намагничивания и семейством статических петель гистерезиса для тонкой электротехнической стали. – Дефектоскопия, 1991, № 9, с. 27–32.
13. Акулов Н.С., Лучевский Б.А. К теории кривых намагничивания ферромагнетиков в области инверсии. – ДАН БССР, 1971, т. XV, № 6, с. 484-487.
14. Мельгуй М.А. К тории гистерезисных явлений в сегнетоэлектриках. – ДАН БССР, 1965, т. IX, № 9, с. 581-584.
15. Зацепин Н.Н. Аналитическая функция, описывающая ход симметричной петли магнитного гистерезиса. – Весці АН БССР, сер. фіз.-тэхн. навук, 1973, № 4, с. 29–31.
16. Пономарев Ю.Ф. Гармонический анализ намагниченности ферромагнетиков, перемагничиваемых переменным полем, с учетом магнитного гистерезиса. I. Способ описания петель магнитного гистерезиса. – Дефектоскопия, 1985, № 6, с. 61–67.
17. Мельгуй М.А. Формулы для описания нелинейных и гистерезисных свойств ферромагнетиков. – Дефектоскопия, 1987, № 11, с. 3–10.
18. Мельгуй М.А., Шидловская Э.А. Экспериментальная проверка аналитических выражений для нелинейных свойств ферромагнитных материалов. – Дефектоскопия, 1987, № 11, с. 10–18.
19. Векслер А.З., Семенко Н.Г. Исследование двухтактного измерительного ферротранзисторного преобразователя напряжения. – Автоматика и телемеханика, 1965, № 9, с. 1599–1605.
20. Пономарев Ю.Ф. Феррозонды с продольным возбуждением в малых переменных полях. – Геофизическое приборостроение. – Л.: Гостехиздат, 1961, вып. 10, с. 54–68.
21. Розенблат М.А. Магнитные элементы автоматики и вычислительной техники. – М.: Наука, 1966. – 720 с.
22. Зацепин Н.Н. Метод высших гармоник в неразрушающем контроле. – Минск: Наука и техника, 1980. – 167 с.
23. Акулов Н.С., Лучевский Б.А. К статистической теории гистерезисных явлений. – ДАН БССР, 1970, т. XIV, № 6, с. 499–502.
24. Мельгуй М.А. К теории гистерезисных явлений в сегнетоэлектриках. – Доклады АН БССР, 1965. – т. IX, № 3, с. 156–159.

Статья поступила в редакцию 18.05.11